5. DYNAMIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

-Approche énergétique-

Elaboré par Youssef RAHOU, novembre 2017

1. Approche énergétique, une conséquence pratique du P.F.D. :

Le **Principe Fondamental de la Dynamique** permet d'identifier des actions mécaniques au niveau d'un mécanisme à comportement cinématique défini, ou l'inverse, en identifiant le comportement cinématique d'un mécanisme sous l'effet d'actions mécaniques connues. Cependant, **ce principe devient un outil relativement complexe, une fois que le mécanisme contient plusieurs solides, d'autre part, son écriture vectorielle nécessite plusieurs projections.**

L'approche énergétique consiste à compenser certaines limites du Principe Fondamentale de la dynamique, en proposant une **écriture scalaire**, globale et pratique permettant de résoudre des cas d'études particuliers, tels que le dimensionnement d'un moteur ou l'identification du rendement d'une chaine d'énergie.

Il est à noter que **l'approche énergétique dérive du Principe Fondamental de la Dynamique**, par conséquent elle n'apporte pas de nouvelles informations, mais une nouvelle méthode de résolution pratique.

	P.F.D.	Approche énergétique
Outil utilisé	P.F.D. (**Principe Fondamental de la Dynamique**)	T.E.C. (**théorème de l'énergie cinétique**)
Approche	locale, détaillée	globale
Portée	Riche en information mais complexe	Dérive du PFS, mais pratique
Forme outil	vectorielle	scalaire

Figure.1. Comparaison des deux approches : P.F.D. et approche énergétique.

2. Notion de puissance :

2.1. Puissance d'une action mécanique, forme intégrale :

Soient deux ensembles matériels distincts (E) et (Σ) en mouvement par rapport à un repère **R**.
On suppose que l'ensemble matériel (Σ) exerce sur l'ensemble matériel (E) une action mécanique représentée par une densité de force $\vec{f}$(M) (unité : N/kg) de manière à avoir **d$\vec{F}$(M)= $\vec{f}$(M).dm** *(Par exemple, l'action mécanique de la pesanteur a pour densité de force $\vec{g}$(M) et d$\vec{F}_{pesanteur}$ (M)= $\vec{g}$(M).dm représente l'action de pesanteur sur la masse dm.*

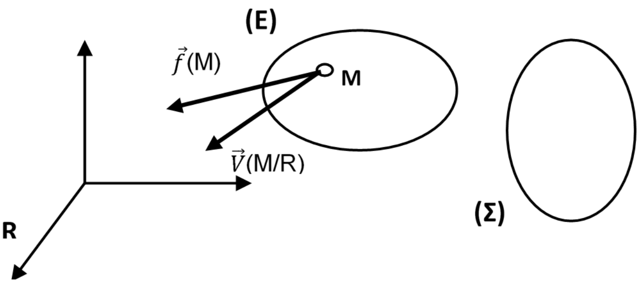

Figure.2. Schéma représentatif des ensembles matériels (E) et (Σ)

La puissance mécanique, à l'instant t, de l'action mécanique de (Σ) sur (E), dans le mouvement de (E) par rapport au repère R, est le scalaire :

$$\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R}) = \int_{\mathbf{M}\in\mathbf{E}} \vec{\boldsymbol{f}}(\mathrm{M}).\vec{\boldsymbol{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\boldsymbol{dm}$$

Unité : W ; watt.
Signe : positif ou négatif.

Remarque :

- **Lorsque l'ensemble (E) est constitué de n solides (S1), (S2), …, (Sn) alors :**
  $$\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E} = \mathrm{S1} \cup \mathrm{S2} \cup \ldots \cup \mathrm{Sn}/\mathbf{R}) = \int_{\mathbf{M}\in\ \mathbf{E} = \mathbf{S1} \cup \mathbf{S2} \cup \ldots \cup \mathbf{Sn}} \vec{\boldsymbol{f}}(\mathrm{M}).\vec{\boldsymbol{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\boldsymbol{dm}$$
  $$= \int_{\mathbf{M}\in\mathbf{S1}} \vec{\boldsymbol{f}}(\mathrm{M}).\vec{\boldsymbol{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\boldsymbol{dm} + \int_{\mathbf{M}\in\mathbf{S2}} \vec{\boldsymbol{f}}(\mathrm{M}).\vec{\boldsymbol{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\boldsymbol{dm} + \ldots + \int_{\mathbf{M}\in\mathbf{Sn}} \vec{\boldsymbol{f}}(\mathrm{M}).\vec{\boldsymbol{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\boldsymbol{dm}$$
  $$= \mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{S1}/\mathbf{R}) + \mathbf{P}(\mathrm{S2} \rightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R}) + \ldots + \mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{Sn}/\mathbf{R}).$$

Ainsi :

$$\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E} = \mathrm{S1} \cup \mathrm{S2} \cup \ldots \cup \mathrm{Sn}/\mathbf{R}) = \mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{S1}/\mathbf{R}) + \mathbf{P}(\mathrm{S2} \rightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R}) + \ldots + \mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{Sn}/\mathbf{R})$$

- Le torseur d'action mécanique de (Σ) sur (E), en introduisant la notion de densité de force $\vec{f}$(M) s'écrit, en un point A quelconque :

$$\{T\,(\mathbf{\Sigma} \rightarrow \mathbf{E})\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{R}}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}) \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{A}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}) \end{Bmatrix}$$

Avec : $\vec{\boldsymbol{R}}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}) = \int_{M\in E} \vec{f}(\mathrm{M})dm$ et $\vec{\boldsymbol{M}}_{A}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}) = \int_{M\in E} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(\mathrm{M})dm$. *Expression.1*

2.2. Puissance d'une action mécanique extérieure à <u>un solide</u>, forme torsorielle :

Dans le cas où l'ensemble matériel (E) se réduit à un seul solide (S), le torseur cinématique de (S) dans son mouvement par rapport à **R** s'écrit, en un point A de (S)**:**

$$\{V(S/\mathbf{R})\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{R}) \\ \vec{\boldsymbol{V}}(A \in S/\mathbf{R}) \end{array} \right\}$$

Avec, pour tout point M de (S), $\vec{\mathbf{V}}(M \in S/\mathbf{R}) = \vec{\mathbf{V}}(A \in S/\mathbf{R}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}$. *Expression.2*

En vue d'établir une expression torsorielle de la puissance, de la même manière que celle qui a été établie pour l'énergie cinétique (chapitre.2), remplaçons l'expression 2 dans l'expression de la puissance :

On a donc : $\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow S/\mathbf{R}) = \int_{M \in S} \vec{\boldsymbol{f}}(M).\vec{\boldsymbol{V}}(M/R)\boldsymbol{dm} = \int_{M \in S} \vec{\boldsymbol{f}}(M).[\vec{\mathbf{V}}(A \in S/\mathbf{R}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}]\boldsymbol{dm}$

$$= \int_{M \in S} \vec{\boldsymbol{f}}(M).\vec{\mathbf{V}}(A \in S/\mathbf{R})\boldsymbol{dm} + \int_{M \in S} \vec{\boldsymbol{f}}(M).[\vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}]\boldsymbol{dm}$$

- Au niveau de la première intégrale, on remarque que $\vec{\mathbf{V}}(A \in S/\mathbf{R})$ peut se mettre en facteur.
- Au niveau de la deuxième intégrale, une propriété du produit mixte permet d'écrire que :

$\vec{\boldsymbol{f}}(M).[\vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}}] = \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{R}).[\overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \vec{\boldsymbol{f}}(M)]$, et de la même manière, $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{R})$ peut se mettre en facteur.

- Il vient donc : $\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow S/\mathbf{R}) = \vec{\boldsymbol{V}}(A \in S/\mathbf{R}).\int_{M \in S} \vec{\boldsymbol{f}}(M)\boldsymbol{dm} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{R}).\int_{M \in S} \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \vec{\boldsymbol{f}}(M)\boldsymbol{dm}$.

$$= \vec{\boldsymbol{V}}(A \in S/\mathbf{R}).\vec{\boldsymbol{R}}(\Sigma \rightarrow S) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{R}).\vec{\boldsymbol{M}}_A(\Sigma \rightarrow S).$$ (*d'après l'expression. 1)*

En synthèse, La puissance de l'action mécanique de (Σ) sur **(S)**, dans le mouvement de **(S)** par rapport au repère R, est égal au produit du torseur d'action mécanique de (Σ) sur **(S)** par le torseur cinématique de **(S)** dans son mouvement par rapport à **R** :

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\Sigma} \rightarrow \mathbf{S}/\mathbf{R}) = \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Sigma} \rightarrow \mathbf{S})\} \,.\, \{\boldsymbol{V}(\mathbf{S}/\mathbf{R})\} = \vec{\boldsymbol{V}}(A \in S/\mathbf{R}).\vec{\boldsymbol{R}}(\Sigma \rightarrow S) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{R}).\vec{\boldsymbol{M}}_A(\Sigma \rightarrow S)$$

A est un point quelconque de (S), **mais le même pour les deux torseurs d'action mécanique et cinématique.**

2.3. Puissances des actions mutuelles entre deux ensembles matériels :

2.3.1. Définition :

La puissance instantanée (à la date t), **des actions mutuelles entre** (Σ) **et** (E), dans **leur** mouvement par rapport au repère R, est la quantité scalaire :

$$\mathbf{P}(\Sigma \leftrightarrow E/\mathbf{R}) = \mathbf{P}(\Sigma \rightarrow E/\mathbf{R}) + \mathbf{P}(E \rightarrow \Sigma/\mathbf{R})$$

2.3.2. Propriété d'indépendance de la puissance des actions mutuelles du repère R :

Reprenons la définition de la puissance, exprimée respectivement en deux repères différents **R** et $\mathbf{R_1}$:

$$\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R}) = \int_{M \in E} \vec{\boldsymbol{f}}(\mathrm{M}).\vec{\boldsymbol{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\boldsymbol{dm}$$

$$\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R1}) = \int_{M \in E} \vec{\boldsymbol{f}}(\mathrm{M}).\vec{\boldsymbol{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R1})\boldsymbol{dm}$$

La soustraction membre à membre donne :

$$\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R})\text{-}\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R1}) = \int_{M \in E} \vec{\boldsymbol{f}}(\mathrm{M}).[\vec{\boldsymbol{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) - \vec{\boldsymbol{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R1})\boldsymbol{dm} \boldsymbol{=} \int_{M \in E} \vec{\boldsymbol{f}}(\mathrm{M}).\vec{\boldsymbol{V}}(\mathrm{M} \in \mathrm{R1}/\mathrm{R})\boldsymbol{dm}.$$

Ce qui peut s'exprimer par :

$$\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R})\text{-}\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R1}) = \{T\ (\Sigma \rightarrow \mathrm{E})\}.\{V\,(\mathrm{R1/R})\}$$ *Expression.3*

Cette expression.3 permet d'écrire :

- Pour l'action mécanique de Σ sur E :
  $$\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R})\text{-}\mathbf{P}(\Sigma \rightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R1}) = \{T\ (\Sigma \rightarrow \mathrm{E})\}.\{V\,(\mathrm{R1/R})\}$$
- Pour l'action mécanique de E sur Σ :
  $$\mathbf{P}(\mathrm{E} \rightarrow \Sigma/\mathbf{R})\text{-}\mathbf{P}(\mathrm{E} \rightarrow \Sigma/\mathbf{R1}) = \{T\ (\mathrm{E} \rightarrow \Sigma)\}.\{V\,(\mathrm{R1/R})\}$$
- L'addition membre à membre des deux expressions précédentes, donne :

$$\mathbf{P}(\Sigma \leftrightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R})\text{-}\ \mathbf{P}((\Sigma \leftrightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R1}) = [\{T\ (\Sigma \rightarrow \mathrm{E})\}\boldsymbol{+}\{T\ (\mathrm{E} \rightarrow \Sigma)\}].\{V\,(\mathrm{R1/R})\}$$

Le théorème des actions mutuelles permet de confirmer que :

$$\mathbf{P}(\Sigma \leftrightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R}) = \mathbf{P}((\Sigma \leftrightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R1})$$

Dorénavant, la puissance des actions mutuelles sera simplement notée :

$$\mathbf{P}(\Sigma \leftrightarrow \mathrm{E})$$

La puissance des actions mutuelles entre (Σ) sur (E) est indépendante du repère **R** :

$$\mathbf{P}(\Sigma \leftrightarrow \mathrm{E}/\mathbf{R}) = \mathbf{P}(\Sigma \leftrightarrow \mathrm{E})$$

2.3.3. Application, le contact ponctuel :

Soient (S1) et (S2) deux solides en contact ponctuel avec frottement au point A (coefficient de frottement f=tanφ), et Π le plan tangent commun en A à (S1) et (S2).

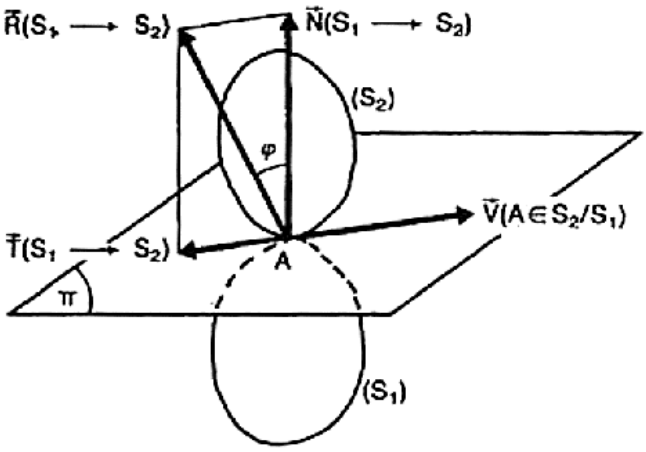

Figure.3. Schématisation du contact ponctuel avec frottement.

Le torseur d'action mécanique de (S1) sur (S2) est de la forme :

$$\{T\ (S1 \rightarrow S2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\boldsymbol{R}}(S1 \rightarrow S2) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

On pose $\vec{\boldsymbol{R}}(S1 \rightarrow S2) = \vec{\boldsymbol{T}}(S1 \rightarrow S2) + \vec{\boldsymbol{N}}(S1 \rightarrow S2)$

Avec N : effort normal et T effort tangentiel (voir figure.3).

Le torseur cinématique du mouvement de (S2) par rapport à (S1), au point A s'écrit :

$$\{V\ (S2/S1)\} = = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S2/S1) \\ \vec{\boldsymbol{V}}(A \in S2/S1) \end{array} \right\}_A$$

Le vecteur vitesse de glissement $\vec{V}(A \in S2/S1)$ est un vecteur de même direction que le vecteur $\vec{\boldsymbol{T}}(S1 \rightarrow S2)$ et **de sens contraire**.

A. Puissance des actions mutuelles entre (S1) et (S2) :

Par définition, cette puissance s'écrit :

$$\mathbf{P}(S1 \leftrightarrow S2) = \mathbf{P}(S1 \rightarrow S2/\mathbf{R}) + \mathbf{P}(S2 \rightarrow S1/\mathbf{R})$$

Cette puissance est indépendante du repère **R. Donc, on peut choisir, par exemple, R lié à (S1)** :

D'où :

$$\mathbf{P}(S1 \leftrightarrow S2) = \mathbf{P}(S1 \rightarrow S2/S1)$$

Qui s'écrit sous forme torsorielle :

$$\mathbf{P}(S1 \leftrightarrow S2) = \{T\ (S1 \rightarrow S2)\}.\{V\ (S2/S1)\}$$

Soit :

$$\mathbf{P}(S1 \leftrightarrow S2) = \vec{\boldsymbol{R}}(S1 \rightarrow S2).\vec{V}(A \in S2/S1)$$

Qui se simplifie en :

$$\mathbf{P}(S1 \leftrightarrow S2) = \vec{\boldsymbol{T}}(S1 \rightarrow S2).\vec{V}(A \in S2/S1)$$

Remarque :

- Ce produit scalaire peut s'annuler comme il peut être négatif. **Dans le cas du frottement, la puissance des actions mutuelles est négatif, il s'agit d'une puissance perdue par frottement entre les deux solides**, qui se transforme en chaleur.

B. Conditions annulant la puissance des actions mutuelles entre les solides au niveau d'un contact ponctuel :

La puissance des actions mutuelles entre deux solides (S1) et (S2) en contact ponctuel s'annule si :

- Le contact ponctuel est supposé **sans frottement**.
- Ou s'il y a **roulement sans glissement**.

Remarque :

- Deux solides ont une **liaison parfaite** si la puissance des actions mutuelles entre eux est nulle, ceci est **le cas des liaisons normalisées usuelles :** $\mathbf{P}(\boldsymbol{S1} \leftrightarrow \boldsymbol{S2}) = 0$.

3. Théorème de l'énergie cinétique :

Le théorème de l'énergie cinétique **dérive directement du Principe Fondamentale de la dynamique**, avec une différence remarquable, c'est qu'il s'agit d'un **théorème à grandeurs scalaires, par opposition au PFD, qui est un principe faisant intervenir des grandeurs vectorielles.**

Dans un premier temps, on établira **le théorème de l'énergie cinétique pour un seul solide**, puis **on généralisera le résultat pour un ensemble de solides.**

3.1. Cas d'un seul solide (S) :

Soit un solide (S), de masse m, en mouvement par rapport à un repère galiléen **Rg**. Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à (S), s'écrit :

$$\{D(\mathbf{S}/Rg)\} = \{T(\overline{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{S})\} \qquad \textit{Expression.4}$$

Avec $\{T(\overline{\mathbf{S}} \rightarrow S)\}$: torseur des actions mécaniques extérieures à (S), s'exerçant sur (S).

L'expression.4, multipliée par le torseur cinématique de (S) dans son mouvement par rapport à Rg donne :

$$\{D(\mathbf{S}/Rg)\}.\{V(\mathbf{S}/Rg)\} = \{T(\overline{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{S})\}.\{V(\mathbf{S}/Rg)\} \qquad \textit{Expression.5}$$

Or, par définition : $\{T(\overline{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{S})\}.\{V(\mathbf{S}/Rg)\} = \mathbf{P}(\overline{\mathbf{S}} \rightarrow S/Rg)$**.** Cette puissance, puisqu'elle ne correspond qu'aux actions mécaniques **extérieures** à (S), **elle est appelée puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (S).**

Reste à développer le membre de gauche de l'expression.5, pour simplifier sa forme. Il faut donc commencer par écrire les deux torseurs, dynamique et cinématique, en un même point, A par exemple.

Par définition : $\{D(\mathbf{S}/Rg)\} = \underset{A}{\left\{\begin{matrix} \int_{M \in (S)} \vec{\Gamma}(M/\boldsymbol{Rg})dm \\ \int_{M \in (S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/\boldsymbol{Rg})dm \end{matrix}\right\}}$ et $\{V(\mathbf{S}/Rg)\} = \underset{A}{\left\{\begin{matrix} \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{Rg}) \\ \vec{\boldsymbol{V}}(A \in S/\mathbf{Rg}) \end{matrix}\right\}}$

Le produit de ces deux torseurs, s'écrit :

$\{D(\mathbf{S}/Rg)\}.\{V(\mathbf{S}/Rg)\} = \vec{\boldsymbol{V}}(A \in S/\mathbf{Rg}).\int_{M \in (S)} \vec{\Gamma}(M/\boldsymbol{Rg})dm + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{Rg}).\int_{M \in (S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/\boldsymbol{Rg})dm.$ *Expression.6*

D'une part, en intégrant le terme $\vec{\boldsymbol{V}}(A \in S/\mathbf{Rg})$ dans la première intégrale, et d'autre part, en intégrant le terme $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{Rg})$ dans la deuxième intégrale, puis en rassemblant ces deux intégrales l'expression.5 devient :

$\{D(\mathbf{S}/Rg)\}.\{V(\mathbf{S}/Rg)\} = \int_{M \in (S)} [\vec{\boldsymbol{V}}(A \in S/\mathbf{Rg}).\vec{\Gamma}(M/\boldsymbol{Rg})dm + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{Rg}).[\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/\boldsymbol{Rg})]]dm.$ *Expression.7*

La propriété du produit mixte assure que :

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{Rg}).[\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/\boldsymbol{Rg})] = [\vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{Rg}) \wedge \overrightarrow{AM}].\vec{\Gamma}(M/\boldsymbol{Rg})$$

D'où l'expression :

$\{D(\mathbf{S}/Rg)\}.\{V(\mathbf{S}/Rg)\} = \int_{M \in (S)} \left[\vec{\boldsymbol{V}}(A \in S/\mathbf{Rg}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{Rg}) \wedge \overrightarrow{AM}\right].\vec{\Gamma}(M/\boldsymbol{Rg})dm$ *Expression.8*

On reconnait, la relation de changement de point, pour le torseur cinématique $\{V(\mathbf{S}/Rg)\}$:

$$\vec{\boldsymbol{V}}(A \in S/\mathbf{Rg}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(S/\mathbf{Rg}) \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{\boldsymbol{V}}(M \in S/\mathbf{Rg})$$

L'expression.8 se réduit à :

$\{D(\mathbf{S}/Rg)\}.\{V(\mathbf{S}/Rg)\} = \int_{M \in (S)} \vec{\Gamma}(M/Rg).\vec{V}(M/Rg)dm$ *Expression.9*

Or, par définition : $\vec{\Gamma}(M/Rg) = [\frac{d}{dt}\vec{V}(M/Rg)]_{Rg}$

Ainsi: $\{D(\mathbf{S}/Rg)\}.\{V(\mathbf{S}/Rg)\} = \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\int_{M \in (S)} [\vec{V}(M/Rg)]^2 dm] = \frac{d}{dt}Ec(S/Rg)$ *Expression.10*

D'où: $\boxed{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{S}/\mathbf{Rg}) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{Ec}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{Rg})}$

Théorème de l'énergie cinétique pour un seul solide (S) :

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique galiléenne **d'un solide (S)** est égale à la **puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (S) :**

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{Ec}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{Rg}) = \mathbf{P}(\bar{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{S}/\mathbf{Rg})$$

Unités : W ; watt pour la puissance et J ; joule pour l'énergie cinétique, 1 W= 1 J/s.

3.2. Cas général d'un ensemble de solides (E) :

Soit un ensemble (E) de n solides (S1), (S2),…, (Sn), en mouvement par rapport à un repère galiléen **Rg**.

Pour chaque solide (Si) de (E), Le Théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt}Ec(Si/Rg) = \mathrm{P}(\bar{\mathrm{S}}\mathrm{i} \rightarrow \mathrm{Si/Rg})$$

Ajoutant membre à membre les relations analogues, écrites **pour les n solides de (E)** :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{i=n} Ec(Si/Rg)\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{P}(\bar{\mathrm{S}}\mathrm{i} \rightarrow \mathrm{Si/Rg})$$

Or, $\sum_{i=1}^{i=n} Ec(Si/Rg) = Ec(E/Rg)$.

Le membre de droite représente **la somme :**

- Des puissances galiléennes des actions mécaniques **extérieures à chaque solide (Si) de (E), donc à (E)** : $\mathbf{P(\bar{E} \rightarrow E/Rg)}$.
- **Des puissances** des actions **mutuelles entre les solides (Si) de l'ensemble (E),** c'est-à-dire :

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{Si} \leftrightarrow \mathrm{Sj/Rg})$$

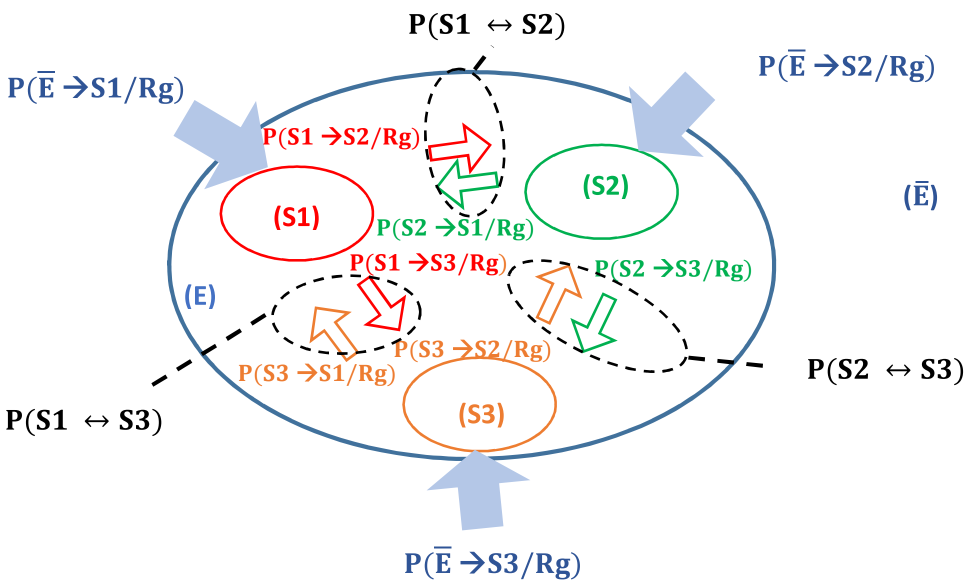

Figure.4. Ensemble des puissances ''extérieures'' et mutuelles, cas d'un ensemble de trois solides.

<u>Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides (E) :</u>

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique galiléenne **d'un ensemble (E), de n solides (Si),** est égale à **la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre les solides (Si) de l'ensemble (E) :**

$$\frac{d}{dt}Ec(E/Rg) = \mathbf{P(\bar{E} \rightarrow E/Rg)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathbf{P(Si \leftrightarrow Sj)}$$

4. Notions de perte de puissance et rendement :

Au niveau d'une chaine d'énergie donnée, composée de plusieurs composants de conversion de conversion d'énergie, de transmission, de modulation de l'énergie, **la puissance n'est jamais transmise de manière intégrale**, mais de manière partielle, et ce, à cause **des phénomènes dissipatifs**, ces derniers causent **des pertes de puissance** qui viennent **atténuer la puissance en entrée** de la chaine d'énergie, et qu'il faut tenir en compte lors de toute phase de dimensionnement.

4.1. Le rendement :

Le rendement est une grandeur sans dimension, permettant de quantifier ces phénomènes dissipatifs, et donc les pertes de puissance. **Il est définit en régime permanent par la relation** :

$$\boldsymbol{\eta = \frac{Psortie}{Pentrée}},$$ le rendement est idéalement égale 1 ; $\eta \in [0,1]$.

Avec

- $P_{entrée}$, La puissance fournie en régime permanent, en entrée de la chaine d'énergie.
- P_{sortie},la puissance fournie en régime permanent, en sortie de la chaine d'énergie.

4.2. Lien entre le rendement et la puissance perdue :

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au système, en **régime permanent**, On a :

$$- P_{sortie} + P_{entrée} + P_{perdue} = 0, \text{ qui s'écrit aussi : } P_{sortie} = P_{entrée} + P_{perdue} \quad (P_{perdue} < 0)$$

Divisons cette expression par $P_{entrée}$:

Il vient :

$$\eta = 1 + \frac{Pperdue}{Pentrée}$$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{P_{perdue} = (\eta - 1)\, P_{entrée} < 0}}$$

Remarque :

- que vaut le rendement global η d'une chaine d'énergie composée de n sous-composants (Si) de rendements ηi ? :